2 Введение

В теории информации часто используются термины из физики, точнее говоря, из термодинамики и статистической физики. С целью объяснения основных понятий рассмотрим физическую модель одного явления.

Предположим, что у нас имеется ящик, разделенный вертикальной перегородкой на две одинаковые части и в перегородке есть отверстие. У нас также имеется 10 частиц. Будем предполагать, что они различаются, например, имеют разную массу или цвет. По этой причине их можно перенумеровать целыми числами от 0 до 9. В этом случае уже совершенно не важны свойства частицы, а важен лишь ее номер. Полезно считать, что есть некоторый словарь, в котором на странице с номером i написаны свойства частицы с номером i. Другими словами, номер частицы является указателем на ее свойства.

Теперь поместим частицы в ящик. Всякая частица может находиться в ящике либо слева от перегородки, либо справа. Назовем положение частицы относительно перегородки состоянием частицы. По смыслу получается, что частица может находиться в двух возможных состояниях. Эти состояния можно перенумеровать двумя числами: 0 и 1. Это опять же ссылки на уже другой словарь состояний. Если скажем, что частица находится в состоянии 0, то, прочитав в словаре на странице 0 о состоянии с номером 0, найдем, что частица находится слева от перегородки. Таким образом, набору из 10 частиц сопоставлен набор (массив) целых чисел $a_0, a_1, ..., a_9$, где всякое a_i может принимать одно из двух значений 0 или 1. Всякий конкретный массив называется ***микросостоянием*** системы из 10 частиц. Например, 0011011001 – это микросостояние системы. Если некто получил такой набор и имеет доступ к двум словарям, где написано, что означает состояние частицы и какими свойствами обладает частица, то он может воссоздать реальную картину происходящего.

Видно, что возможных микросостояний будет $2^{10} = 1024$. Их можно перенумеровать числами от 0 до 1023, имея в виду, что всякое микросостояние, описывается числом в двоичной системе счисления. Таким образом, получаем, что любое микросостояние однозначно записывается в виде числа, и в нашей конкретной ситуации для всякого числа от 0 до 1023 можно, пользуясь двоичным представлением числа и двумя словарями, восстановить реальную картину происходящего. Количество возможных микросостояний называется ***энтропией*** системы. Поскольку это число может быть исключительно большим, то под энтропией понимается его логарифм по некоторому основанию (обычно 2 в силу исторических причин).

В физике обычно рассматривается некоторая функция, которая всякому микросостоянию возвращает число. Будем считать, что эта функция аналог измерения какой-нибудь величины. Например, температура или давление. В нашей ситуации в качестве измерения можно подсчитать вес левой части нашего ящика. Если частицы имеют одинаковую массу, то вес это фактически количество частиц в системе которые лежат слева. В нашей ситуации возможные значения этого измерения числа от 0 до 10. Отметим, что эта функция всякому микросостоянию возвращает единственное число. Следовательно, она определена на всем множестве микросостояний. Гораздо интересней посмотреть, как выглядит прообраз этого отображения, то есть состояния с фиксированным значением функции.

Для начала подсчитаем, сколько существует микросостояний для всякого фиксированного значения измерения. Оформим это в виде таблицы, где n – количество частиц слева (вес левой части ящика), а m – количество состояний с заданным n (количество состояний с заданным весом).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Вычисления очень простые. Общий смысл будет рассказан позже. Сейчас укажем только, что полученные числа это биномиальные коэффициенты. Множество всех состояний с заданным числом (весом) n называется ***макросостоянием***.

Глядя на таблицу можно сделать полезные выводы:

- Сумма всех состояний равна 1024 – это следует из свойств биномиальных коэффициентов. Следовательно, множество всех микросостояний разбилось на 11 непересекающихся подмножеств.

- Если известно макросостояние, то микросостояние определяется неоднозначно. Например, если $n=3$, то микросостоянием может быть хоть 0110001000, хоть 0000001110. Исключения составляют лишь крайние случаи при $n=0$ и $n=10$.
- Всякое микросостояние можно описать парой чисел (строка из таблицы): первое это n, второе число это количество состояний с заданным n.

Число m, зависящее от n, называется энтропией макросостояния, поскольку это количество состояний с фиксированным весом n. Отсюда видно, что максимальное значение энтропии достигается при $n=5$. В этом случае вес левой части ящика совпадает с весом правой части ящика, и эта ситуация называется равновесием. Отсюда проистекают высказывания типа «система стремится к равновесию», «энтропия системы растет при приближении к равновесию» и т.п.

Вообще, макросостояния можно задавать не только с помощью функций, но и с помощью логических высказываний. Например, наша физическая система такова, что первые три частицы всегда находятся в одном и том же состоянии. Пусть они склеились. Тогда множество микросостояний можно разбить на непересекающиеся подмножества. Нетрудно сообразить, что нужных состояний будет 2×2^7, а не удовлетворяющих требуемым условиям 6×2^7. Такого сорта задачи назовем ***стационарными (?)***.

Макросостояния – разбиения множества микросостояний. TODO: дописать и вставить картинку.

В нашем примере достаточно легко определить все микросостояния, которые принадлежат одному макросостоянию. Такая ситуация встречается крайне редко. Как правило, это задача является трудной и решается только полным перебором по всем микросостояниям с проверкой на принадлежность макросостоянию. TODO: вставить простой пример.

Теперь нас интересует эволюция системы во времени. Предположим, что мы наблюдаем за нашим ящиком каждую единицу времени, и отмечаем, какое микросостояние. Результаты записываем в журнал. Естественно, в журнал заносится номер микросостояния. В результате получатся последовательность чисел от 0 до 1023 включительно.

Для того чтобы все было более обозримо рассмотрим случай когда частиц всего 3. Тогда возможных микросостояний состояний будет 8.

№	0	1	2	3	4	5	6	7
Микросостояние	000	001	010	011	100	101	110	111

Следовательно, их можно перенумеровать числами от 0 до 7. Отметим, что если эти числа представить в двоичной системе то получается трех битовое число, которое описывает нужное микросостояние. Возможные значения веса левой части ящика $0,1,2,3$, следовательно, число возможных макросостояний равно 4. Опишем все эти сведения в одной таблице:

n	m	Микросостояния
0	1	000
1	3	100, 010, 001
2	3	110, 101, 011
3	1	111

Таким образом, эволюция нашей системы описывается последовательностью чисел от 0 до 7. Можно считать, что эволюция системы за n шагов описывается строкой длины n, над алфавитом из 8 элементов, причем каждый символ алфавита описывает микросостояние системы. Как правило, эта строка имеет специальную структуру, потому что некоторые переходы между микросостояниями запрещены.

Для моделирования эволюции системы нужно построить оператор перехода, который говорит о том, в какое микросостояние переходит данное микросостояние за единицу времени. Следовательно, оператор перехода суть отображение множества микросостояний в себя. Проще всего этот оператор представить в виде матрицы, у которой 1 на месте (i, j) означает, что состояние с номером j переходит в состояние с номером i, для краткости будем писать $j \to i$.

Пусть эволюция нашей системы такова, что за единицу времени через дырку в перегородке может проникнуть только одна частица. Посмотрим, во что может перейти каждое микросостояние.

000	$\to$	001	010	100
001	$\to$	000	011	101
010	$\to$	000	011	110
011	$\to$	001	010	111
100	$\to$	000	101	110
101	$\to$	001	100	111
110	$\to$	010	100	111
111	$\to$	011	101	110

Если перейдем к номерам состояний, то:

0	$\to$	1	2	4
1	$\to$	0	3	5
2	$\to$	0	3	6
3	$\to$	1	2	7
4	$\to$	0	5	6
5	$\to$	1	4	7
6	$\to$	2	4	7
7	$\to$	3	5	6

Теперь строка $0,1,3,7,5$ говорит о последовательности переходов

$$000 \to 001 \to 011 \to 111 \to 101.$$

В то же время, строка $0,1,6,7$ не может описывать эволюцию системы, потому что перехода $001 \to 110$ не существует. Рассмотрим все строки длины n, которые являются корректными описаниями эволюции системы. Всего произвольных строк длины n над алфавитом из 8 символов будет 8^n. Из них нужно исключить некорректные строки. Количество корректных строк для нашего случая равно $8 \cdot 3^{n-1}$, а количество некорректных, соответственно, $8^n - 8 \cdot 3^{n-1} = 8\left(8^{n-1} - 3^{n-1}\right)$. Данный пример показателен тем, что, хотя нам и удалось подсчитать количество корректных строк длины n, но мы не знаем эффективного способа их перечисления. Конечно же, мы всегда можем воспользоваться полным перебором по всем возможным строкам. В этом случае множество всех строк перебирается в фиксированном порядке (например, в лексикографическом) и выбираются только корректные строки. Сложность в том, что число всех возможных строк значительно превосходит число корректных строк и с ростом n доля корректных строк снижается:

$$\frac{8\cdot 3^n}{8^n} = 8\cdot 0.375^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Наконец, представим полученную информацию в виде матрицы: $M_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{если } j \text{ переходит в } i \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для обозначения состояния системы удобно использовать вектор, у которого только одна единица, а остальные нули. Позиция этой единицы определяет номер состояния системы. Например, если $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, то система находится в микросостоянии с номером 2, которое соответствует конфигурации 010. Чтобы определить в какие микросостояния может перейти система из состояния 010, достаточно матрицу M умножить на вектор v.

$$Mv = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Результатом является третий столбец матрицы M.

На самом деле, мы не можем наблюдать за микросостояниями системы. Реальные измерения позволяют определить лишь текущее макросостояние. Поэтому результатом последовательности измерений является строка чисел над алфавитом уже из 4 символов. При этом возникает задача по заданной последовательности макросостояний описать все возможные последовательности микросостояний.

Оператор перехода также можно построить для макросостояний.

$$\begin{array}{lll} 0 & \to & 1 \\ 1 & \to & 0 \quad 2 \\ 2 & \to & 1 \quad 3 \\ 3 & \to & 2 \end{array}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$